**Лекция 5**

**Определённый интеграл. Теорема Ньютона-Лейбница. Методы интегрирования определённого интеграла.**

**ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ**

**7.1.1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла**

Широкое применение в различных областях науки, в том числе в экономике, математическом моделировании, имеет место одно из основных понятий математического анализа — определенный интеграл.Рассмотрим некоторые задачи, приводящие к определенному интегралу.

**Задача 1.** Пусть на отрезке  определена непрерывная функция . Будем предполагать, что на этом отрезке  ***Криволинейной трапецией*** называют фигуру, ограниченную кривой , отрезком  оси *Ох*, прямыми ** и ** (рис. 7.1). Для вычисления площади криволинейной трапеции разделим отрезок  (основание трапеции) произвольным образом точками  на *n* частей так, что  Пусть  — длина этих частей. Наибольшую из этих разностей в дальнейшем будем обозначать 

Через каждую точку деления проведем прямую, параллельно оси *Оy*, до пересечения с кривой . Заменим каждую элементарную трапецию прямоугольником с основанием  и высотой , где  — произвольная точка отрезка  Площадь каждого такого прямоугольника равна 



Рис. 7.1

Сумму площадей всех этих прямоугольников   можно рассматривать как приближенную величину площади криволинейной трапеции, т. е.



Чтобы найти точное значение площади криволинейной трапеции надо перейти к пределу, при  Таким образом,

 (7.1)

**Задача 2.** Известно, что потребление электроэнергии в течение суток меняется. Предположим, что  — функция, характеризующая потребление электроэнергии, где  — время. Требуется определить количество электроэнергии, потребленной за период времени .

**Решение.** Общее количество потребляемой электроэнергии можно рассматривать как сумму количеств электроэнергии, потребляемой на малых промежутках от  до . Если предположить, что в течение этого промежутка  не меняется, то суммарный объем потребленной электроэнергии равен  и

.

На практике это действие осуществляется счетчиками электроэнергии.

**7.1.2. Определение определенного интеграла**

К нахождению пределов сумм вида (7.1) приводят различные задачи. Рассмотрим такую задачу в общем виде.

Пусть на отрезке  определена функция . Разделим отрезок  произвольным образом точками  на *n* частей так, что  Пусть  — длина этих частей, наибольшую из этих разностей в дальнейшем будем обозначать 

В каждом промежутке , длиной  возьмем произвольную точку  и вычислим соответствующие значения функции . Составим сумму  которая называется ***интегральной*** ***суммой*** для функции  на отрезке .

**Определение 7.1.**Если предел последовательности интегральных сумм при стремлении к нулю длины наибольшего частичного интервала разбиения существует, конечен и не зависит от способа выбора точек  и точек , то говорят, что функция  ***интегрируема*** на .

**Определение 7.2.** Этот предел называют ***определенным интегралом*** от функции  на отрезке  и обозначают

 (7.2)

Числа *a* и *b* называются соответственно ***нижним*** и ***верхним*** ***пределами*** ***интегрирования***;  — подынтегральной функцией;  — подынтегральным выражением; отрезок — промежутком интегрирования; *х* — переменной интегрирования.

**Теорема 1. Необходимое условие интегрируемости функции.** Если функция интегрируема на отрезке , то она ограничена на .

**Теорема 2. Достаточное условие интегрируемости функции.** Если функция  определена на отрезке  и непрерывна на , то она интегрируема на .

### **Теорема 3.** Кусочно-непрерывная (с конечным числом точек разрыва) и ограниченная на отрезке функция интегрируема.

### Определения интегральной суммы и определенного интеграла естественно обобщаются на случай *а > b*.

**Геометрический смысл определенного интеграла.** Если функция неотрицательна на отрезке , где  то  численно равен площади под кривой  на .

## **7.1.3. Основные свойства определенного интеграла**

**Замечание.** В определенном интеграле не имеет значения, какой буквой обозначать переменную интегрирования:



## Из определения определенного интеграла вытекают следующие его свойства.

**1.** 

**2.** 

**3.** 

**4.** Если , то .

**5.** , причем точка *с* может не принадлежать отрезку .

**6.** 

**7.** , где *С* — постоянная.

**8.** Если функции  и  интегрируемы на отрезке на ,  и

 для всех  то 

**9.** Оценка определенного интеграла: если  на [*a,b*],  то

. (7.3)

**10.** .

**11.** **Теорема о среднем значении.** Если функция  непрерывна на отрезке [*a,b*],  то найдется такое значение  что

 (7.4)

Эта теорема имеет важную **геометрическую интерпретацию**. Пусть  на . Теорема о среднем утверждает: найдется такая точка  из отрезка  (рис. 7.2), что площадь под кривой  равна площади прямоугольника со сторонами  и .

****

Рис.7.2

**12.** Если  и , то .

**7.1.4. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница**

Вычисление определенного интеграла по определению очень сложно и реально может быть проведено для двух-трех простейших функций. Хотя из данного определения не следует, что между неопределенным и определенным интегралами есть какая-либо зависимость, на самом деле они очень тесно связаны.

**Теорема.** Если функция  непрерывна на , то

 (7.5)

для всех  (по свойству 12).

Например,  

***Доказательство.***

Обозначим . Нужно доказать, что . Для этого применим определение производной. Пусть  — приращение аргумента. Тогда





Теперь  Функция  непрерывна в точке *х*, поэтому  Наконец  так как ξ лежит между *х* и 

Из этой теоремы легко получить формулу для вычисления определенного интеграла. По доказанной теореме  — первообразная для функции  Поэтому  — произвольная первообразная для  Получим:

.

Найдем постоянную *С*.

.

Следовательно,

.

Отсюда получаемформулу, называемую **формулой Ньютона-Лейбница**:

, (7.6)

где  — некоторая первообразная для , т.е. .

**Пример 7.1.** Вычислить .

**Решение.**



**Пример 7.2.** Вычислить .

**Решение.**

.

**7.1.5. Замена переменной в определенном интеграле**

**Теорема.**

, (7.7)

где  — функция, непрерывная вместе со своей производной  на отрезке , а  — функция, непрерывная на [*α,β*].

***Доказательство.*** Пусть  — первообразная для функции  на отрезке . Тогда  — первообразная функции  на [*α,β*]. Действительно  Применяя дважды формулу Ньютона — Лейбница, получаем



**Замечание.** Если  — нечетная функция, т. е. , то .Если  — четная функция, т. е. , то .

**Пример 7.3.** Вычислить .

**Решение.** Положим ; если ; если . Тогда



**Пример 7.4.** Вычислить .





**Пример 7.5.** Вычислить .

**Решение.** Положим . Тогда , откуда . Когда переменная *х* изменяется от 0 до 4, то переменная изменяется от 0 до 2. Таким образом, после замены переменной у определенного интеграла изменяются пределы интегрирования. Итак, имеем

.

**Замечание.** Отсюда видно, что разница в применении замены переменной в неопределенном и определенном интеграле состоит в том, что во втором случае не приходится возвращаться к старой переменной, так как при замене переменной изменяются также и пределы интегрирования.

**7.1.6. Интегрирование по частям в определенном интеграле**

**Теорема.**

, (7.8)

где  — непрерывно дифференцируемые функции на отрезке [*а,b*].

***Доказательство.*** Применим формулу Ньютона — Лейбница к равенству

 Получим

**.**

Отсюда  т.к. по определению дифференциала 

**Пример 7.6.** Вычислить .

**Решение.** Воспользуемся методом интегрирования по частям. Положим , откуда . Тогда



**Пример 7.7.** 



.

**Пример 7.8.** Вычислить .

**Решение.** Сначала воспользуемся методом замены переменных, затем проинтегрируем полученный интеграл по частям.



.