**Лекция 4. Понятие первообразной и неопределенного интеграла**

**1. ПОНЯТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА**

**1.1. Первообразная функции и неопределенный интеграл**

Как известно, математические операции встречаются попарно, образуя пары двух взаимообратных действий. Например, сложение и вычитание, умножение и деление, потенцирование и логарифмирование. При этом прямые действия почти всегда однозначны, а обратные действия чаще всего многозначные.

В предшествующем разделе рассматривалась операция дифференцирования, когда по известной функции , определялась ее производная. Рассмотрим обратную задачу: по известной функции  найти функцию , что

. (1)

**Определение 1*.***Функция  называется ***первообразной*** для функции  в некотором промежутке , если в каждой точке этого промежутка выполнено равенство (1).

Нахождение первообразной  для данной функции  называют ***интегрированием***. Например, для  первообразными являются функции  и все функции , где  — произвольная постоянная.

**Теорема 1.** Если  и  — две первообразные для функции  на , то разность между ними равна постоянному числу.

***Доказательство.*** . По следствию из теоремы Лагранжа, если производная функции на некотором отрезке равна нулю, то функция на этом отрезке постоянная. Следовательно, существует число С такое, что .

Отсюда следует, что если для функции  найдена одна первообразная , то совокупность всех первообразных для  имеет вид , где  — постоянная величина.



**Определение 2.**Если  является первообразной для , то выражение  называется ***неопределенным*** ***интегралом*** от функции  и обозначается символом .

Следовательно, по определению

,

если .

Знак  — символ интеграла, функция  — подынтегральная функция,  — подынтегральное выражение,  — переменная интегрирования.

**Теорема 2.** Если функция является непрерывной на некотором отрезке, то она интегрируема на этом отрезке.

**1.2. Основные формулы, используемые при интегрировании**

Выпишем важнейшие формулы, используемые при интегрировании, которые включают основные свойства неопределенного интеграла и интегралы от простейших функций.

**Основные свойства неопределенного интеграла:**

1. 

2. 

3. .

4. .

5. .

, .

**Таблица неопределенных интегралов**

1. .

2. .

3. .

4. .

5. .

.

7. .

8. .

9. .

10. .

11. .

12. .

13. .

14. .

15. .

1 .

17. .

18. .

19. .

**2. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ**

**2.1. Непосредственное интегрирование**

Непосредственное интегрирование основано на использовании основных свойств неопределенного интеграла, таблицы интегралов от основных элементарных функций и тождественного преобразования (если необходимо) подынтегральной функции.

**1.** Используется формула , т.е. подынтегральная функция отличается от табличной тем, что вместо аргумента  стоит некоторая линейная функция от .

**Пример 1.** Найти интеграл .

**Решение.** Здесь , следовательно, первообразная будет иметь вид  и

.

.

Но не всегда применение этой формулы столь очевидно.

**Пример 2.** Найти интеграл .

**Решение.** Подынтегральная функция в этом случае отличается от табличных интегралов, поэтому проведем следующее преобразование  . Это действие называется выделением полного квадрата и очень часто при интегрировании выражений, содержащих квадратичный трехчлен, его необходимо использовать. В результате видим, что  и



.

**2.** Используются правила  и  . Эти правила применяются в том случае, если подынтегральная функция записана в виде произведения или частного простейших функций. (Правил для интегрирования произведения или частного функций не существует!).

**Пример 3.**



.

.

**2.2. Интегрирование методом замены переменной**

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок следующих видов.

**1.** Применяется формула , которая является аналогом формулы дифференцирования сложной функции. Для выбора новой переменной интегрирования используется определение дифференциала .

Этот метод непосредственного интегрирования имеет свое название — ***внесение под знак дифференциала***.

**Пример 4.**

.

**Пример 5.**



.



.

**2.** Замена переменной в неопределенном интеграле производится также с помощью подстановки вида , где  — монотонная, непрерывно дифференцируемая функция новой переменной *t*. Формула замены переменной в этом случае:

. (2)

Этот метод применяется, если предшествующие два метода не дали результата, замена подбирается таким образом, чтобы появились функции, содержащиеся в таблице основных интегралов.

***Докажем*** эту формулу. Найдем производные левой и правой частей.

.

.

Так как производные равны, то левая и правая части (2) по следствию из теоремы Лагранжа отличаются на некоторую постоянную, ч.т.д.

**Пример 6.**





.

**2.3. Интегрирование по частям**

Интегрирование по частям основано на использовании формулы

,

где  — непрерывно дифференцируемые функции от *х* на отрезке [*а,b*].

***Доказательство.*** Проинтегрируем равенство

.

, ч.т.д.

Эта формула дает возможность свести вычисление  к вычислению интеграла , если он легче интегрируется. При этом за  берется такая функция, которая при дифференцировании упрощается, а за *dv* — та часть подынтегрального выражения, интеграл от которой известен или может быть найден.

Так, например, для интегралов вида , , , где  — многочлен, за *u* следует принять , а за *dv* — соответственно выражения , , ; для интегралов вида , ,  за *u* принимаются соответственно функции , , , а за *dv* — выражение .

**Пример 7.** Найти интеграл .

**Решение.**

.

**Пример 8.** Найти интеграл .

**Решение.**



Если бы выражения *u* и *dv* мы выбрали иначе, например , то получили бы , откуда



и пришли бы к интегралу более сложному, чем исходный, так как степень сомножителя при тригонометрической функции повысилась на единицу.

**Пример 9.**





То есть в одном интеграле иногда приходится применять несколько раз этот метод интегрирования.