**Лекция 1**

**1. Функции. Область определения. Элементарные функции**

**1.2. Функция одной независимой переменной. Область определения**

**Определение 4**. Пусть даны два непустых множества *Х* и *Y*. Если каждому элементу *х* из множества *Х* по определенному правилу ставится в соответствие один и только один элемент *y* из *Y*, то говорят, что на множестве *Х* задана ***функция*** *f* (или отображение) с множеством значений *Y*. Это можно записать так: , *Х* *Y* или *f* : *Х* → *Y*, , где множество *Х* называется ***областью определения*** функции, а множество *Y*, состоящее из всех чисел вида , – ***множеством значений*** функции. Область определения функции *f* обозначается через , а множество значений – через  Значение функции  при  обозначают через .

Область определения функции в простейших случаях представляет собой: интервал (открытый промежуток) , т.е. совокупность значений *х*, удовлет­воряющих условию ; сегмент (отрезок, или замкнутый промежуток) , т.е. совокупность значений *х*, удовлетворяющих условию ; полу­интервал  (т.е. ) или  (т.е. ); бесконечный интер­вал  (т.е. ) или  (т.е.) или  (т.е. ); совокупность нескольких интервалов или сегментов и т. п.

**Определение 5.** ***Графиком функции***  называется множество точек плоскости *хOу* с коор­динатами ), где .

**Определение 6.** Пусть функция  есть функция от переменой *u*, определенной на множестве *U* с областью значений *Y*, а переменная *u* в свою очередь, является функцией  от переменной *х*, определенной на множестве *X* с областью значений *U*. Тогда заданная на множестве *X* функция  называется ***сложной*** (или композицией, суперпозицией, функцией от функции).

**Определение 7. *Основными элементарными функциями*** называются функции       ***Элементарными функциями*** называются функции, построенные из основных элементарных функций с помощью конечного числа алгебраических действий +,-, и конечного числа операций образования сложной функции.

Например, – элементарная функция. А функции  ,,  – неэлементарные.

Элементарные функции делятся на алгебраические и неалгебраические (трансцендентные).

***Алгебраическими*** называются функции, в которых над аргументом проводится конечное число алгебраических действий. Всякая неалгебраическая называется ***трансцендентной***. К числу алгебраических относятся целая рациональная функция (многочлен или полином): и дробно-рациональная функция – отношение двух многочленов.

Функция ***иррациональная***, если в составе операций над аргументом имеется извлечение корня. К трансцендентным относятся показательная, логарифмическая, тригонометрические, обратные тригонометрические функции.

**Пример 2**. Найти область определения функции .

**Решение.** Функция определена, если  и , т. е. если  и . Область определения функции есть объединение двух интервалов; .

**1. Способы задания функции**

Существует несколько ***способов задания функции***:

1. Аналитический способ, если функция задана формулой .

2. Табличный способ.

Графический способ.

4. Словесный способ.

Примерыаналитического задания функции: ,

 – функция постоянной эластичности. Примером словесного задания функции является функция 

**1.4. Основные свойства функций: четность, нечетность, периодичность, монотонность, ограниченность**

**1. Четность и нечетность.**

**Определение 8.** Функция  называется ***четной***, если для любых значений *х* из области определения и ***нечетной***, если  В противном случае функция  называется ***функцией общего вида***. График четной функции симметричен относительно оси *Oy* (Рис. 6), а график нечетной ―относительно начала координат (Рис. 7).

**Пример** Проверить четность функции 

**Решение.** . Функция нечетная.

**2. Монотонность.**

**Определение 9.** Функция  называется ***возрастающей*** (***убывающей***) на промежутке *Х*, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции.

Пусть  и  Тогда функция  возрастает на промежутке *Х,* если(Рис. 8), и убывает, если (Рис. 9). Такие функции называют ***строго монотонными***.

Функция  ***неубывающая*** на промежутке *Х,* если(Рис. 13), и ***невозрастающая***, если. Такие функции называют ***монотонными***.

**3. Ограниченность.**

**Определение 10.** Функция  называется ***ограниченной*** на промежутке *Х*, если существует такое положительное число *М,* что  для любого  (Рис. 10). В противном случае – ***неограниченной***. Если выполняется неравенство  , то функция называется ***ограниченной сверху*** (***снизу***) (Рис. 11). Например, функция  ограничена на всей оси *Ох*. так как при любом *х* выполняется неравенство . Примером неограниченной на отрезке  функции может служить функ­ция на отрезке .

**4. Периодичность.**

**Определение 11.** Функция  называется ***периодической*** с периодом , если для любого *х* их области определения функции . ***Основным периодом*** функции называется положительное наименьшее число *T*, обладающее указанным свойством.

# 2. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

**2.2. Определение предела функции**

Пусть функциязадана в некоторой окрестности точки , кроме, быть может, самой точки .

**Определение 16.** Число *b* называется***пределом функции  при***  если для любого, сколь угодно малого  найдется такое (зависящее от ε, ), что для всех х, удовлетворяющих условию , кроме, быть может, самой точки , выполняется неравенство  (Рис. 18).

Кратко это записывают так:



Этот предел функции обозначается или  при 

**Определение 17.** Число *b* называется ***пределом функции  при***  если для любого, сколь угодно малого  найдется такое  (зависящее от ε, ), что для всех х таких, что, верно неравенство . Этот предел функции обозначается  или  при  (Рис. 19).

 

Рис. 18 Рис. 19

Условно записывают , если  при , где *М*– произвольное положительное число.

**2.5. Основные теоремы о пределах**

1. При функция может иметь только один предел.
2. 

Практическое вычисление пределов основывается на следующих теоремах.

Если существуют  и , то

,

4. , ,

5.  при ,

6.  для непрерывных функций (определение непрерывной функции дается ниже).

7. Если в некоторой окрестности точки *х*0 (или при достаточно больших *х* по модулю) , то 

**2.6. Признаки существования пределов**

**Теорема 1.** Если в некоторой окрестности точки *х*0 (или при достаточно больших *х* по модулю)  и , то  существует и .

**Теорема 2.** Если числовая последовательность  монотонна и ограничена, то она имеет предел.

**Теорема**  Если в некоторой окрестности точки *х*0 (или при достаточно больших *х* по модулю)  где  бесконечно малая при , то существует предел .

**2.7. Односторонние пределы**

**Определение 20.** Если  и , то употребляют запись ; если  и  – запись**.Числа и  называются соответственно ***левым*** и ***правым*** пределом функции *f*(*х*) в точке *х*0.

**Теорема***.* Для существования предела функции *f*(*х*) при  необходимо и доста­точно, чтобы .

**Пример 6.** Например, для функции 

,



Следовательно, предел  не существует, так как  (Рис.  20).

**Пример 7.** Для функции 

, 

Следовательно, предел  существует:  (Рис. 21).

Графически это выглядит так:

 

Рис. 20 Рис. 21

**Пример 8.** Найти 

**Решение.** Так как **, то числитель дроби стремится к числу , знаменатель – к числу . Следовательно, 